

Principes théoriques du filtre monochromatique de SOLC

Jean-Marie Malherbe, Août 2007

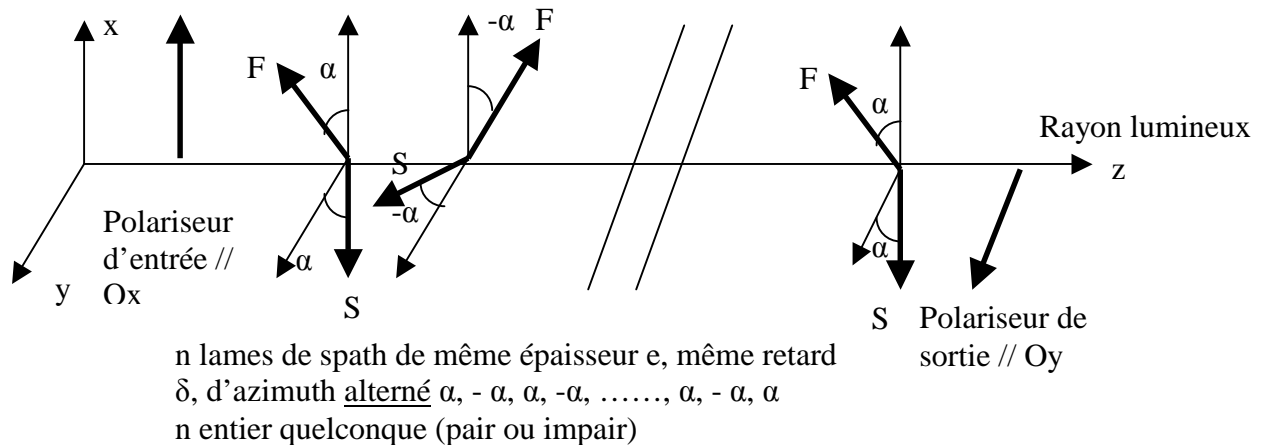
I - Généralités

Le filtre de SOLC est, comme le filtre de LYOT, un filtre monochromatique polarisant dont la bande passante peut descendre à 0.5 Å. Son principe est basé sur l'interférence de l'onde ordinaire et de l'onde extraordinaire à la sortie d'un cristal biréfringent uniaxe, le spath (ou calcite CaCO_3). Un filtre de SOLC est constitué, contrairement au filtre de LYOT, d'un seul étage, comportant de nombreux cristaux de spath entre deux polariseurs linéaires, cristaux dont les orientations (azimuts des axes rapide F et lent S) sont diverses. Un tel filtre fournit un spectre cannelé. Toutes les lames ont la même épaisseur. La cannelure utile est ensuite isolée par un filtre interférentiel étroit de l'ordre de 5 Å de bande passante.

Un filtre de SOLC est thermostaté au dixième de degré, généralement autour de 40°C, pour que les propriétés optiques du matériau biréfringent (indices de réfraction) restent stables.

Certains filtres ont une bande passante accordable, c'est à dire qu'il est possible de déplacer la bande passante de quelques Å vers l'aile bleue ou l'aile rouge d'une raie spectrale avec une grande précision (pas de 0.1 Å). Dans ce cas, chaque bloc biréfringent de spath est suivi d'un ensemble lame quart d'onde fixe, demi onde rotative, quart d'onde fixe, comme on le verra plus loin. On fait varier la bande passante en tournant chaque demi onde d'une même valeur angulaire. Ce dispositif implique une mécanique complexe, comme pour le filtre de LYOT.

II - Un filtre de SOLC à n lames d'azimut alterné



On se place en optique paraxiale sous incidence normale. Chaque lame de spath introduit un retard de phase entre la vibration sur l'axe F (rapide) et sur l'axe S (lent) égal à $\delta = (2\pi/\lambda) \Delta n e$, où $\Delta n = n_o - n_e$ est la différence entre les indices ordinaire et extraordinaire (pour le spath, $n_o = 1.658$ et $n_e = 1.486$ soit une différence de 0.172). Le retard introduit par chaque lame est identique. Les azimuts sont alternés en $\alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \alpha, -\alpha, \dots$. Mais il peut y avoir un nombre quelconque de lames (n entier pair ou impair), l'azimut de la dernière lame est alors α (n impair) ou $-\alpha$ (n pair).

Désignons par $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ les composantes du vecteur champ électrique. On passe de \mathbf{E}_{in} (champ entrant dans une lame quelconque) à \mathbf{E}_{out} (champ sortant de cette même lame) par la relation $\mathbf{E}_{out} = \mathbf{M}(\alpha, \delta) \mathbf{E}_{in}$ où \mathbf{M} est une matrice égale à :

$\cos(\delta/2) - i \sin(\delta/2) \cos(2\alpha)$	$-i \sin(\delta/2) \sin(2\alpha)$
$-i \sin(\delta/2) \sin(2\alpha)$	$\cos(\delta/2) + i \sin(\delta/2) \cos(2\alpha)$

Pour la première lame, on a $\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_0 = (E_0, 0)$, et pour l'ensemble du filtre de SOLC :

$\mathbf{E}_{out} = \mathbf{M}(\alpha, \delta) \mathbf{M}(-\alpha, \delta) \mathbf{M}(\alpha, \delta) \mathbf{M}(-\alpha, \delta) \dots \mathbf{E}_0$, soit n fois \mathbf{M} en alternant α et $-\alpha$.

L'angle α est égal à une valeur bien précise : $\alpha = 45^\circ / n = \pi / (4n)$

On ne conserve en sortie que $E_{y,out}$ (polariseur // Oy) et on calcule l'intensité sortante I par $I = E_{y,out} E_{y,out}^*$, où $*$ désigne la quantité conjuguée.

On peut montrer que l'intensité émergente I est reliée à l'intensité incidente $I_0 = E_0^2$ par la relation analytique:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(n\psi)}{\sin(\psi)} \cos(\psi) \tan(2\alpha) \right]^2$$

où $\cos(\psi) = \sin(\delta/2) \cos(2\alpha)$ et $\delta = (2\pi/\lambda) \Delta n e$

On obtient un spectre cannelé.

Position des cannelures :

$\Psi = k\pi$ (k entier) d'où $\cos(\psi) = \sin(\delta/2) \cos(2\alpha) = \sin(\delta/2) \cos(\pi / (2n)) = \pm 1$

Supposons pour simplifier que n est grand.

Alors $\cos(\pi / (2n)) \approx 1$ et $\sin(\delta/2) \approx \pm 1$ entraîne $\delta/2 = (\pi/\lambda) \Delta n e \approx k\pi + \pi/2$, k entier

D'où l'on tire la position des cannelures :

$\lambda \approx \Delta n e / (k + 1/2)$, pour k entier

Position des minima (zéros) :

$n\Psi = k\pi$ (k entier) d'où $\cos(\psi) = \sin(\delta/2) \cos(2\alpha) = \sin(\delta/2) \cos(\pi / (2n)) = \cos(k\pi / n)$

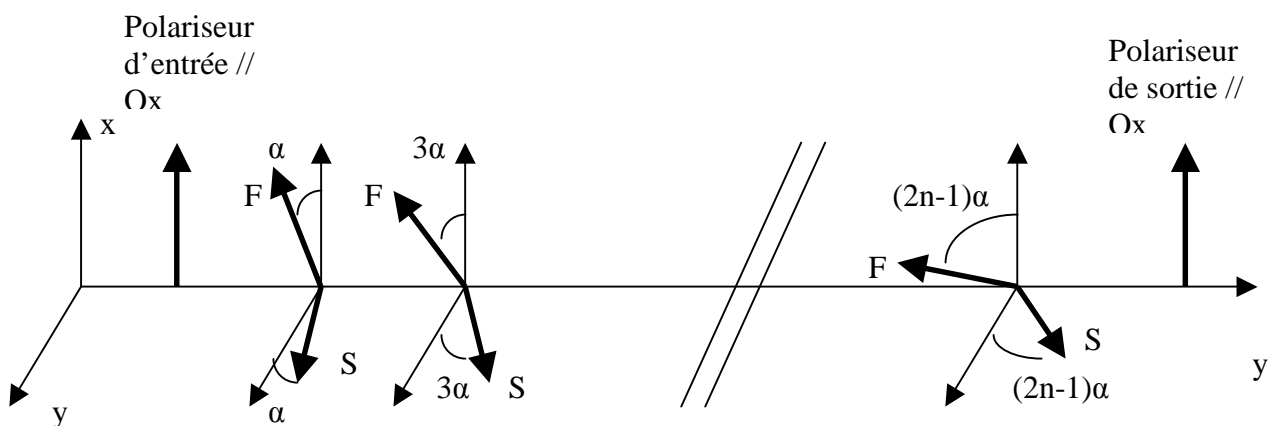
Supposons pour simplifier que n est grand.

Alors $\cos(\pi / (2n)) \approx 1$, et $\sin(\delta/2) \approx \cos(k\pi / n) \approx \cos(\pi/2 - \delta/2)$ entraîne $\delta/2 = (\pi/\lambda) \Delta n e \approx k\pi/n + \pi/2$ pour k entier

D'où l'on tire la position des zéros :

$\lambda = \Delta n e / (k/n + 1/2)$, pour k entier

III - Un filtre de SOLC à n lames d'azimuth en progression arithmétique



n lames de spath de même épaisseur e , même retard δ , d'azimuth en progression arithmétique de raison 2α , soit azimuths respectifs $\alpha, 3\alpha, 5\alpha, 7\alpha, \dots, (2n-1)\alpha$

L'azimut des lames de spath est en progression arithmétique de raison 2α , les azimuts respectifs sont donc : $\alpha, 3\alpha, 5\alpha, 7\alpha, \dots, (2n-1)\alpha$, pour n lames, n entier quelconque (pair ou impair).

Pour la première lame, on a encore $\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_0 = (E_0, 0)$, et pour l'ensemble du filtre de SOLC :

$$\mathbf{E}_{out} = \mathbf{M}((2n-1)\alpha, \delta) \dots \mathbf{M}(5\alpha, \delta) \mathbf{M}(3\alpha, \delta) \mathbf{M}(\alpha, \delta) \mathbf{E}_0, \text{ n fois M pour } (2n-1)\alpha, \dots, 5\alpha, 3\alpha, \alpha$$

L'angle α est toujours égal à une valeur bien précise : $\alpha = 45^\circ / n = \pi / (4n)$

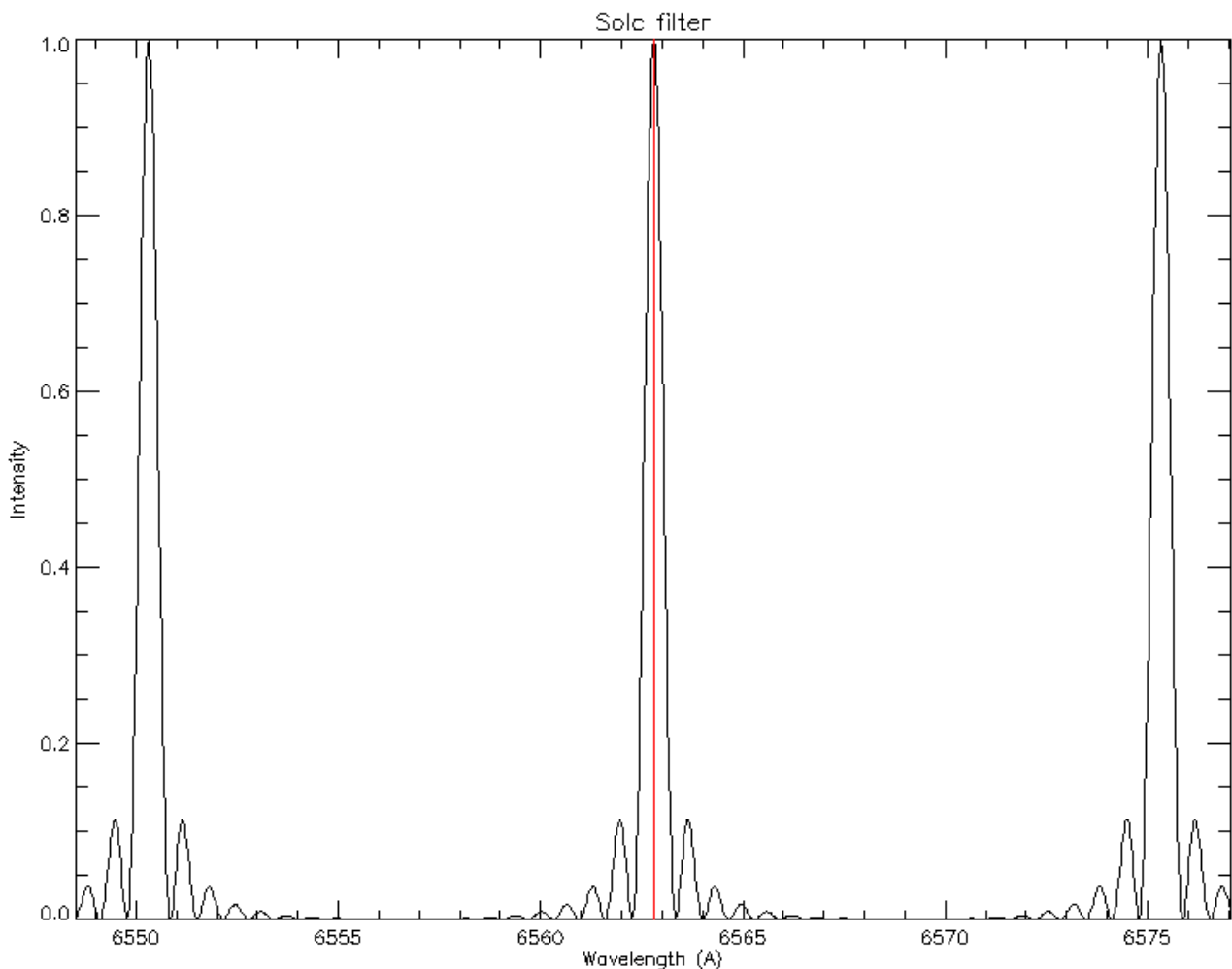
On ne conserve en sortie que $E_{x,out}$ (polariseur // Ox) et on calcule l'intensité sortante I par $I = E_{x,out} E_{x,out}^*$, où * désigne la quantité conjuguée.

On peut montrer que l'intensité émergente I est reliée à l'intensité incidente $I_0 = E_0^2$ par la même relation analytique que dans le cas précédent:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(n\psi)}{\sin(\psi)} \cos(\psi) \tan(2\alpha) \right]^2$$

Mais où $\cos(\psi) = \cos(\delta/2) \cos(2\alpha)$, avec $\delta = (2\pi/\lambda) \Delta n e$

On obtient un spectre cannelé décalé d'une demi cannelure par rapport au cas précédent, pour une même épaisseur e des lames.



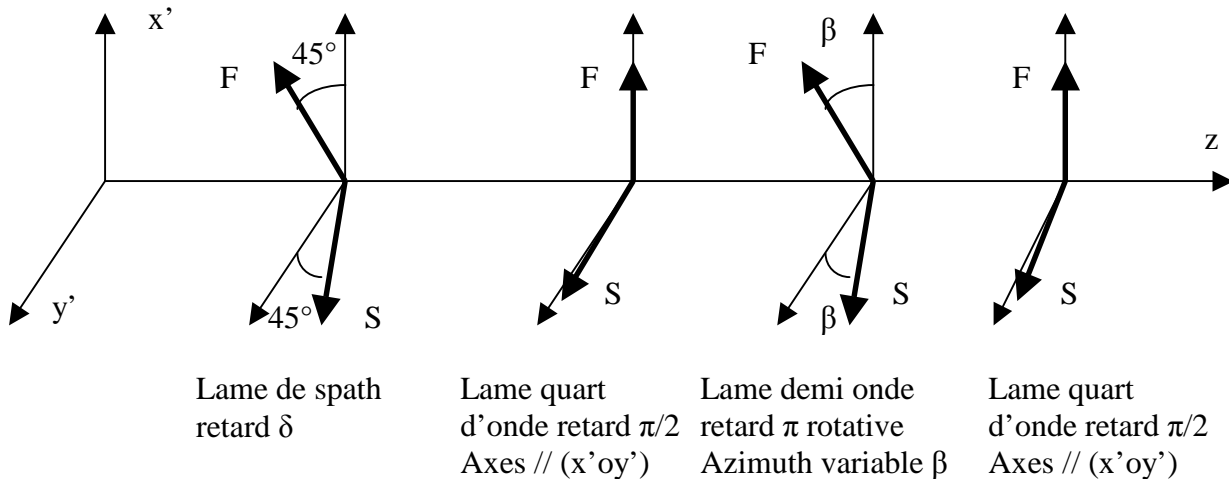
Exemple obtenu avec $e = 2 \text{ mm}$ et 20 lames de spath ($n_o = 1.658$; $n_e = 1.486$) ; la distance entre cannelures est de 12 Å et la bande passante (largeur à mi hauteur) de 0.5 Å.

IV - Un filtre de SOLC accordable

Comme pour le filtre de LYOT, se pose le problème de pouvoir déplacer la bande passante du filtre vers l'aile bleue ou l'aile rouge de la raie.

Première possibilité

On place derrière chaque lame de spath une lame quart d'onde d'axes // ($x'oy'$), une lame demi onde d'azimuth variable β , et de nouveau une quart d'onde d'axes // ($x'oy'$), selon le montage suivant (les axes ox' et oy' sont choisis à 45° des axes F et S de la lame de spath) :



Dans le repère ($x'oy'$), la matrice de transfert \mathbf{M} de la lame de spath devient :

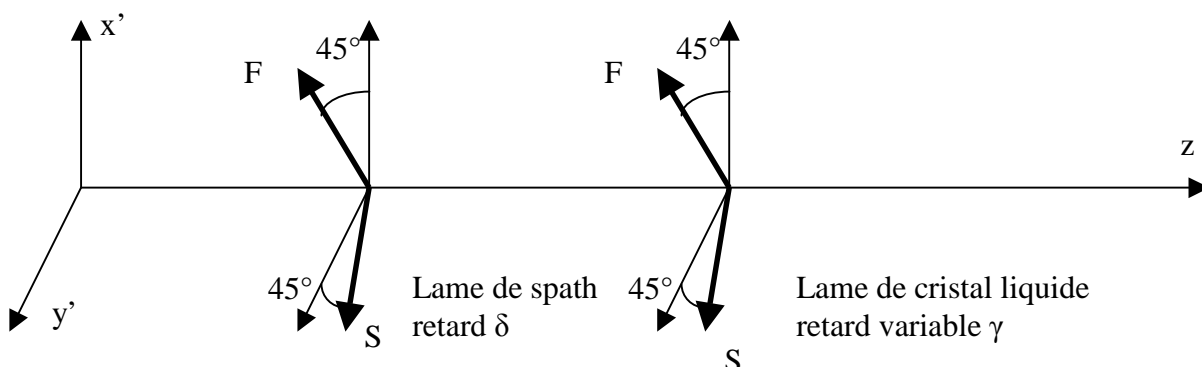
$\cos(\delta/2)$	$-i \sin(\delta/2)$
$-i \sin(\delta/2)$	$\cos(\delta/2)$

Dans le repère ($x'oy'$), la matrice de transfert \mathbf{M} de l'ensemble quart d'onde, demi onde, quart d'onde est:

$\cos(-2\beta)$	$-i \sin(-2\beta)$
$-i \sin(-2\beta)$	$\cos(-2\beta)$

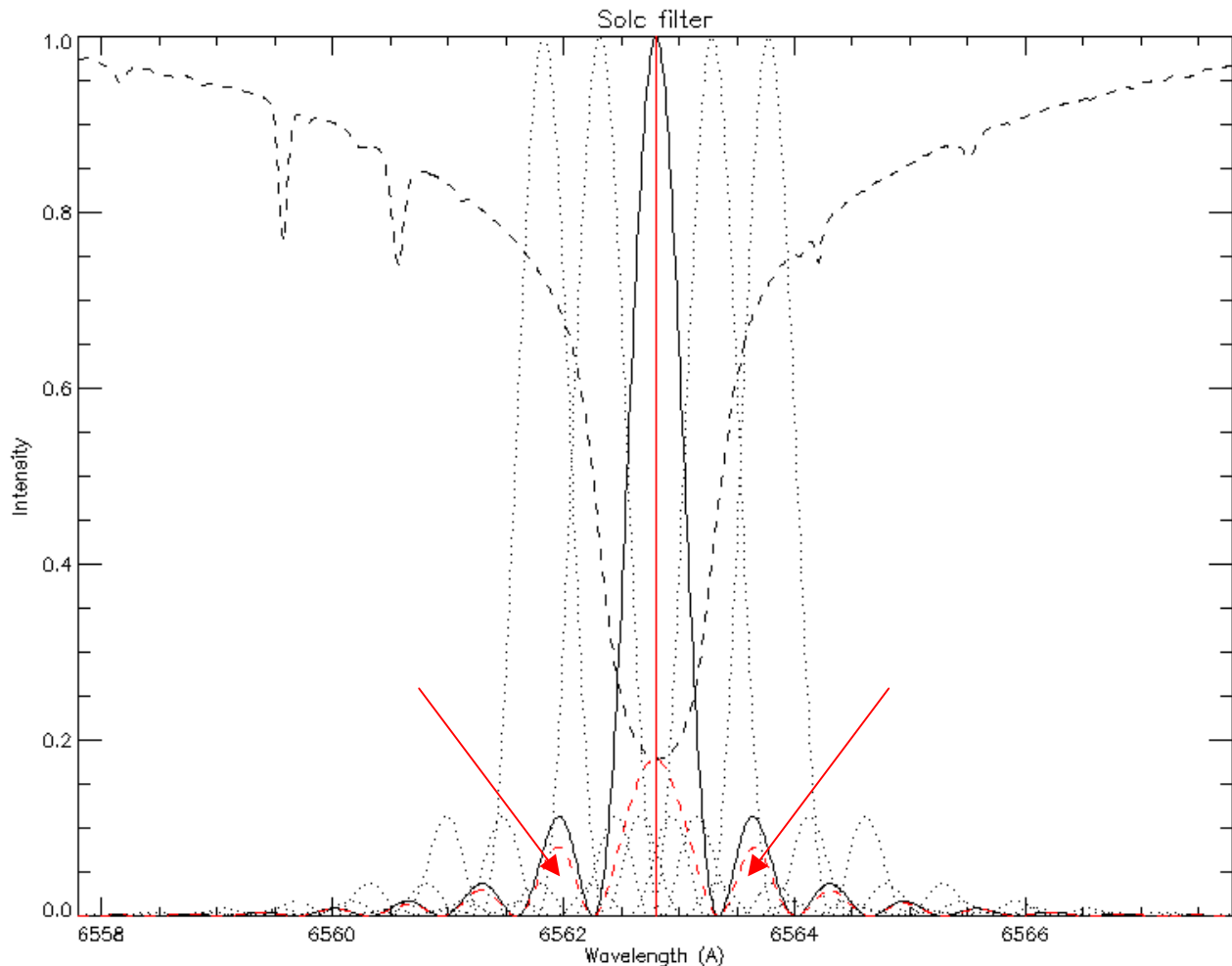
Ce montage introduit donc un déphasage de -2β ; le **déphasage global étant de $(\delta/2 - 2\beta)$** , il suffit donc de changer dans la fonction de transfert du filtre de SOLC ($\delta/2$) en **$(\delta/2 - 2\beta)$** .

Seconde possibilité



On remplace l'équipage quart d'onde, demi onde rotative, quart d'onde, par une lame à cristal liquide de retard variable γ dont les axes sont parallèles à ceux du spath. Le retard γ peut varier électriquement entre 0 et 2π .

Ce montage introduit un **retard global égal à $(\delta + \gamma)$** , il suffit donc de changer dans la fonction de transfert du filtre de SOLC ($\delta/2$) en $(\delta + \gamma)/2$.



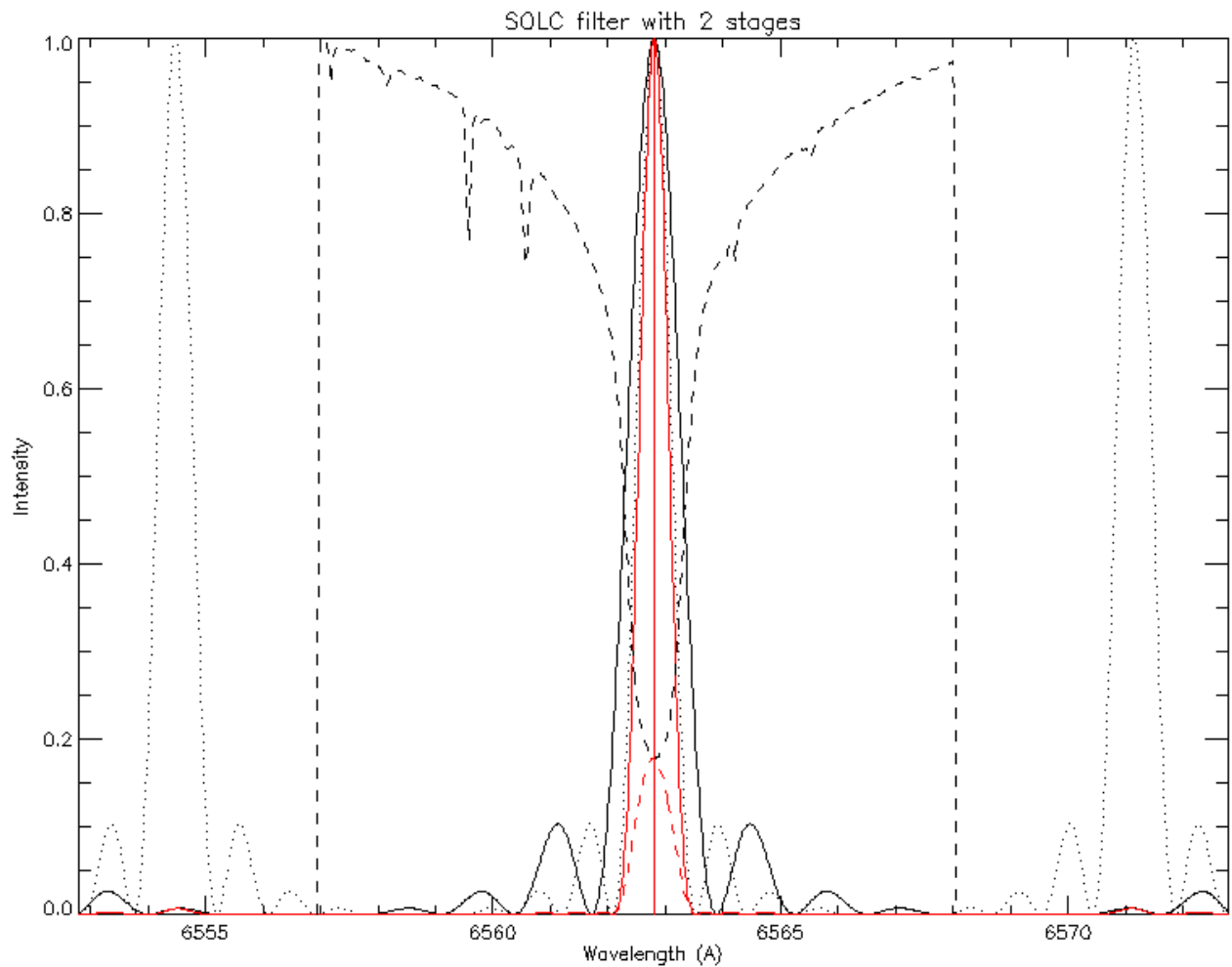
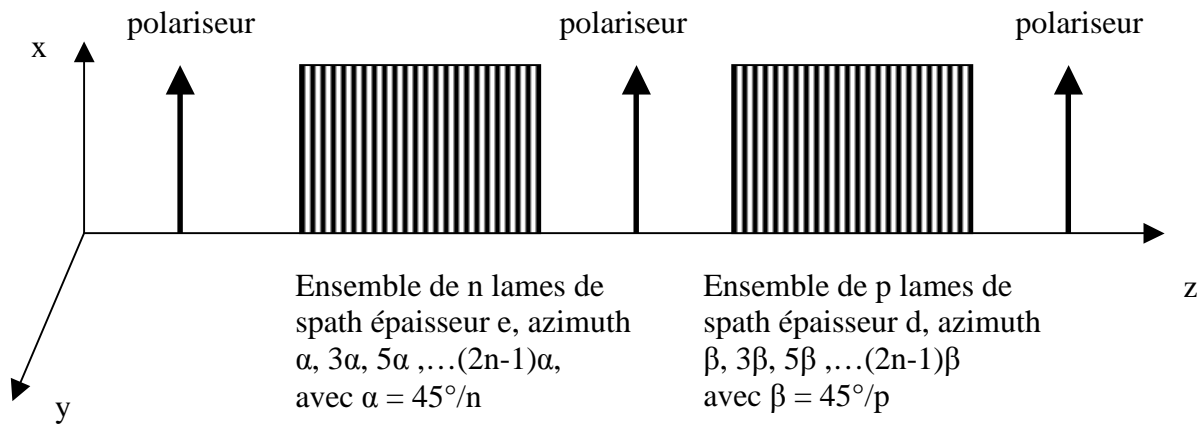
Déplacement de la bande passante par pas de 0.5 Å à l'aide d'une lame demi onde rotative par pas de $\beta = 3.5^\circ$. Epaisseur $e = 2$ mm, $n = 20$ étages de spath ($n_o = 1.658$; $n_e = 1.486$).

La raie H α est représentée en tireté (---), ainsi que la raie vue au travers du filtre dans le cas seulement du centrage de la cannelure au centre raie, tireté rouge (----).

On constate sur la figure ci dessus (flèches **rouges**) que le signal au centre de la raie H α est fortement pollué par les ailes de la raie en raison des cannelures secondaires du filtre. Nous allons montrer maintenant qu'il est possible, comme dans le cas du filtre de LYOT, de se débarrasser des cannelures indésirables en utilisant un double filtrage, l'un basé sur des lames d'épaisseur e , l'autre sur des lames d'épaisseur $3/2 e$.

V - Un filtre de SOLC à deux étages

Le but est d'amener les lobes secondaires du premier filtre en face des zéros du second filtre. Nous avons pris à titre d'exemple un premier étage à 10 lames d'épaisseur $e = 2$ mm suivi d'un second étage de 10 lames également, mais d'épaisseur $3/2 e = 3$ mm. La bande passante résultante de 0.5 Å est à peu près identique à celle d'un filtre à 20 étages d'épaisseur $e = 2$ mm, mais on a **complètement éliminé les lobes secondaires** comme le montre la figure suivante.



Filtre à 2 étages : 10 lames d'épaisseur e , 10 lames d'épaisseur $d = 3/2 e$.

Premier filtre : trait continu noir —

Second filtre : trait pointillé noir
 Les lobes secondaires des 2 filtres sont en opposition de phase

Filtre résultant : trait continu rouge —

Raie $H\alpha$: tireté noir ----

Raie $H\alpha$ vue au travers du filtre : tireté rouge ----

Le signal au centre raie n'est plus pollué par les ailes (lobes secondaires éliminés)